

Федоряка Д.С.

Явище перколяції у клітинних автоматах

Вступ

Клітинні автомати (КА) – це математична модель для дослідження еволюції взаємодіючих однакових об'єктів. Вона складається з плоскої ґратки, кожний елемент якої (комірка) має скінчену кількість станів. Комірки можуть синхронно змінювати свій стан за певними правилами в залежності від стану сусідніх комірок. Вперше це поняття ввів Дж. Фон Нейман [1]. На сьогодні розроблено багато моделей КА, найвідоміша з них – гра «Життя» [2]. В цій моделі ґратка складається з квадратів, кожен має лише 2 стани («живий» і «мертвий») та змінює їх в залежності від кількості «живих» безпосередніх сусідів. Вона має лише два правила: «умова народження» («мертва» клітина стає «живою», якщо має рівно 3 «живих» сусіди) та умова виживання («жива» клітина не стає «мертвою», якщо має від 2 до 3 живих сусіди).

Під час виконання науково-дослідницької роботи, пов'язаної зі створенням аналогів гри «Життя» на нестандартних ґратках та комп'ютерному моделюванні їх [3], я зіткнувся з цікавим явищем. При моделюванні випадкових колоній за умов, близьких до умов гри «Життя» еволюція відбувалася досить довго і колонія переходила в ряд періодичних або статичних структур так, що кінцева концентрація була менша за початкову. Але при встановленні верхньої межі обох умов рівним або майже рівним максимальному числу сусідів, розвиток колонії ставав набагато швидшим і в більшості випадків вона приходила до одного з двох результатів: всі клітини ставали «живими» (іншими словами, колонія заповнювала весь доступний їй простір), або всі клітини ставали «мертвими». При цьому кінцева доля залежала від початкової концентрації¹ (за умови рівномірного розподілу «живих» клітин) та «перехідний» діапазон концентрацій (з іншим результатом) був невеликим. Це явище має спільні риси з явищем перколяції у фізиці (різка зміна якісної характеристики внаслідок незначної зміни кількісної характеристики), тому я вирішив окремо його дослідити.

Явище перколяції у фізиці

Нехай є посудина, заповнена діелектричним порошком та два не контактуючих електроди в ній. Між цими електродами є різниця потенціалів. Будемо додавати до діелектрика порошок провідника (наприклад, металеву стружку) та ретельно перемішувати порошки. Спочатку струм між електродами буде практично нульовим. Але в певний момент часу провідника буде достатньо, щоб між електродами виник ланцюжок із провідних частинок. Це явище є прикладом досягнення порогу перколяції, коли спостерігається колосальне стрибкоподібне (на кілька порядків) зростання електропровідності суміші.

Іншим прикладом перколяції є протікання рідин через пористі матеріали².

Введення явища перколяції в клітинних автоматах та його теоретичне обґрунтування

Розглянемо модифікацію гри «Життя», в якій клітини не помирають від перенаселення (умова виживання – від двох до восьми сусідів). Будемо моделювати еволюцію випадкових колоній з рівномірним розподілом живих клітин. При невеликих початкових концентраціях нові клітини не народжуються, а існуючі гинуть і колонія зникає. Але при певній концентрації клітини будуть розташовані настільки щільно, що почнуть народжуватися нові клітини і поле почне швидко заповнюватися. При досягненні великих концентрацій заповнення зупиниться, бо для народження в порожній комірці клітини, необхідно щоб вона мала не більше трьох живих сусідів. Якщо ж

¹ В цій статті під концентрацією розуміється відношення кількості «живих» комірок поля до загальної кількості комірок.

² Термін «перколяція» у перекладі з англійської означає «змочування» або «протікання» - вперше його застосовано при вивченні просочування ґрунтових вод крізь порожнини у гірських породах шахт.

відмінити це правило (встановити умову народження в інтервалі [3,8]), то колонія дуже швидко заповнить усі доступні комірки. Саме це явище необмеженого розмноження колонії при мінімальній можливій для цього концентрації і є перколяційним ефектом у КА.

Промодельюємо поведінку колонії для цих прикладів. Експериментально побудуємо графіки залежності середньої кінцевої концентрації (K) від початкової концентрації (k) для гри «Життя» без смерті від перенаселення (правило s28/b3)³ та взагалі без верхніх обмежень (правило s28/b38). Для порівняння побудуємо графік для класичної гри «Життя» (правило s23/b3) – див. рис.1.

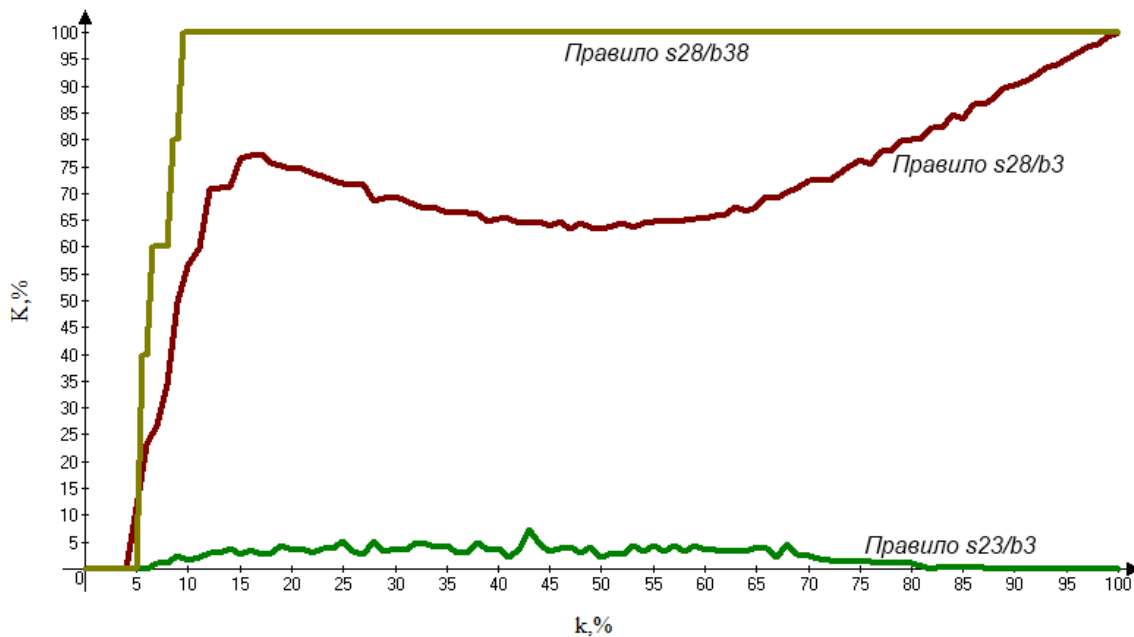


Рис. 1. Перколяція у грі «Життя»

Тут і далі графіки залежності $K(k)$ побудовані за допомогою створеної мною в ході досліджень комп'ютерної програми [3]. Для їх побудови було використано наступний експериментальний алгоритм. Для кожної початкової концентрації від 0% до 100% з кроком 1% на досить великому полі (25x25) створюється випадкова колонія з рівномірним розподілом живих клітин. Для цієї колонії моделюється⁴ її еволюція при даних умовах до тих пір, доки вона не стане статичною (популяція не змінюватиметься впродовж 10 ходів), повністю зникне або заповнить все поле. Якщо еволюція триває довше 1000 ходів, вона переривається (в цьому випадку кінцевою концентрацією вважається середнє арифметичне концентрацій останніх 10 ходів). Це повторюється декілька разів (в даному досліді – 50) для кожного значення k, і значення K знаходиться як середнє арифметичне кінцевих конфігурацій.

Як можна бачити з графіків на рис.1, у першому випадку при дуже малих початкових концентраціях (далі - k) відбувається швидкий зростання популяції, але кінцева концентрація (далі - K) утримується в межах 60-80%, а при великих k колонія взагалі ніяк не змінюється. У другому випадку вже при k=9% колонія заповнює все поле.

Таке швидке зростання кінцевої концентрації пояснити дуже легко. Якщо навколо однієї комірки виникнуть хоча б три клітини, в ній з'явиться клітина, потім клітини з'являться у сусідніх комірках і так далі. Звичайно, при одній й тій же концентрації перколяція може відбуватися або не відбуватися - залежно від розташування клітин на полі. Тому, говорячи про концентрацію, що відповідає перколяції, маємо на увазі не число, а діапазон значень. У вищенаведеному графіку при k=4 K=0%; при k=5..8 K≈20..80; при k=9 K=100%, тому діапазон перколяції – від 5% до 8%. Це означає, що при таких k процес перколяції є ймовірнісним, але при більших k заповнення всього поля відбувається завжди.

³ Іноді правила клітинних автоматів скорочують так: s[діапазон умов виживання]/b[діапазон умов народження]. (s= still alive, b= birth).

⁴ В роботі моделювання виконується на поверхні тора, оскільки тоді поле з меншою похибкою можна вважати нескінченним.

Межі перколяції

Як ми переконалися, при відміні верхніх меж для виживання у грі «Життя»(тобто якщо ці обмеження встановлені на рівні максимально можливої кількості сусідів - восьми), доля будь-якої колонії залежить від її початкової концентрації k : При малих k вона загине, а при великих – заповнить все поле. При цьому існує діапазон значень k , для яких колонія може еволюціонувати по обидвох сценаріях, або перейти у статичну конфігурацію. Для таких значень середня кінцева концентрація буде лежати в межах $0\% < K < 100\%$. Назвемо межами перколяції межі цього діапазону.

Для того, щоб відкинути малоімовірні випадки, вважатимемо, що перколяція відбувається при середній кінцевій концентрації в інтервалі $[1\%, 99\%]$, а не $(0\%, 100\%)$. Тоді межі перколяції можна формально визначити таким чином:

- Нижня межа перколяції, або поріг перколяції: P_{\min} – найбільше n таке, щоб для всіх $k \leq n$ виконувалося $K(k) < 1\%$;
- Верхня межа перколяції: P_{\max} – найменше n таке, щоб для всіх $k > n$ виконувалося $K(k) > 99\%$.

Отже, знаючи межі перколяції та початкову концентрацію колонії k можна визначити подальшу долю колонії:

- Якщо $k \leq P_{\min}$, колонія з дуже великою ймовірністю загине;
- Якщо $P_{\min} < k \leq P_{\max}$, доля колонії невизначена (можливий будь-який результат);
- Якщо $k > P_{\max}$, колонія з дуже великою ймовірністю заповнить все поле.

Експериментальне дослідження перколяції у грі «Життя»

Сформулюємо задачі, які досліджуються в даній роботі.

1. Визначити залежність меж перколяції від умов;

2. Визначити залежність середньої кінцевої концентрації від початкової під час перколяції.

Для виконання цих задач побудуємо за описаним вище алгоритмом графіки залежності $K(k)$ для умов виживання та народження, верхні межі яких максимальні (адже лише за цієї умови відбувається перколяція), а нижні межі рівні між собою та набувають всіх можливих значень:

- Для квадратної ґратки: правило $b(x,8)/s(x,8)$, де $x=0..8$ – рис.2;
- Для трикутної ґратки: правило $b(x,12)/s(x,12)$, де $x=0..12$ – рис.3;
- Для шестикутної ґратки: правило $b(x,6)/s(x,6)$, де $x=0..8$ – рис.4;

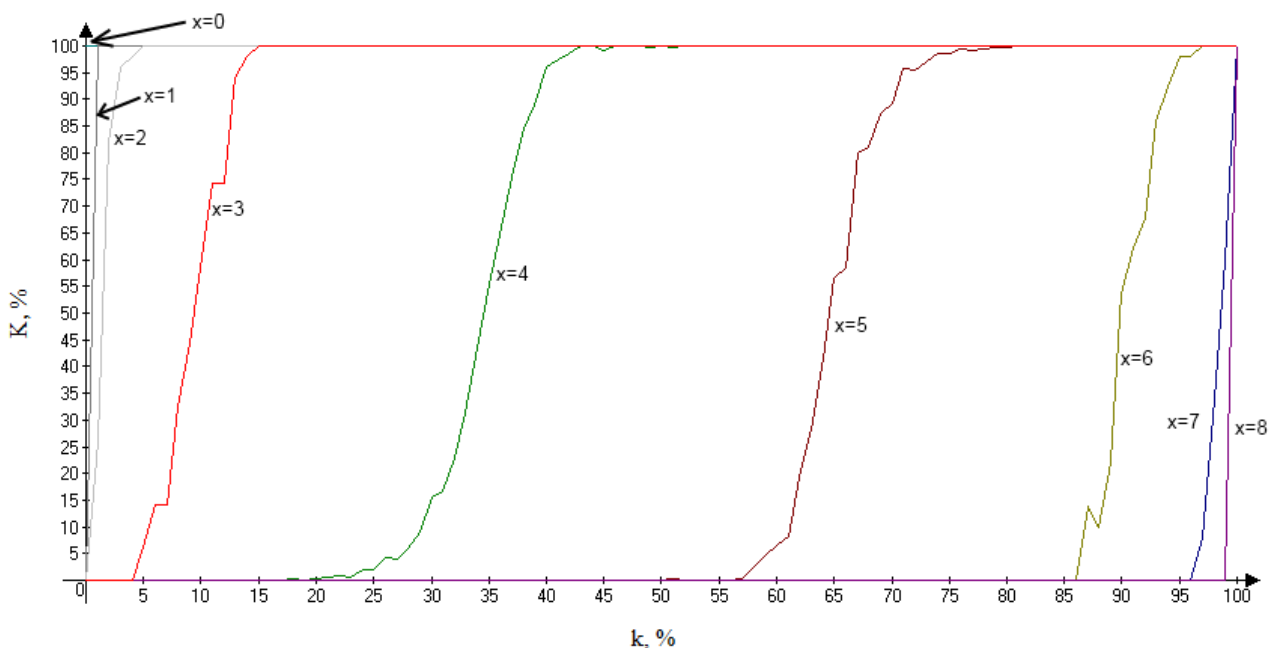


Рис. 2. Перколяція на квадратній ґратці

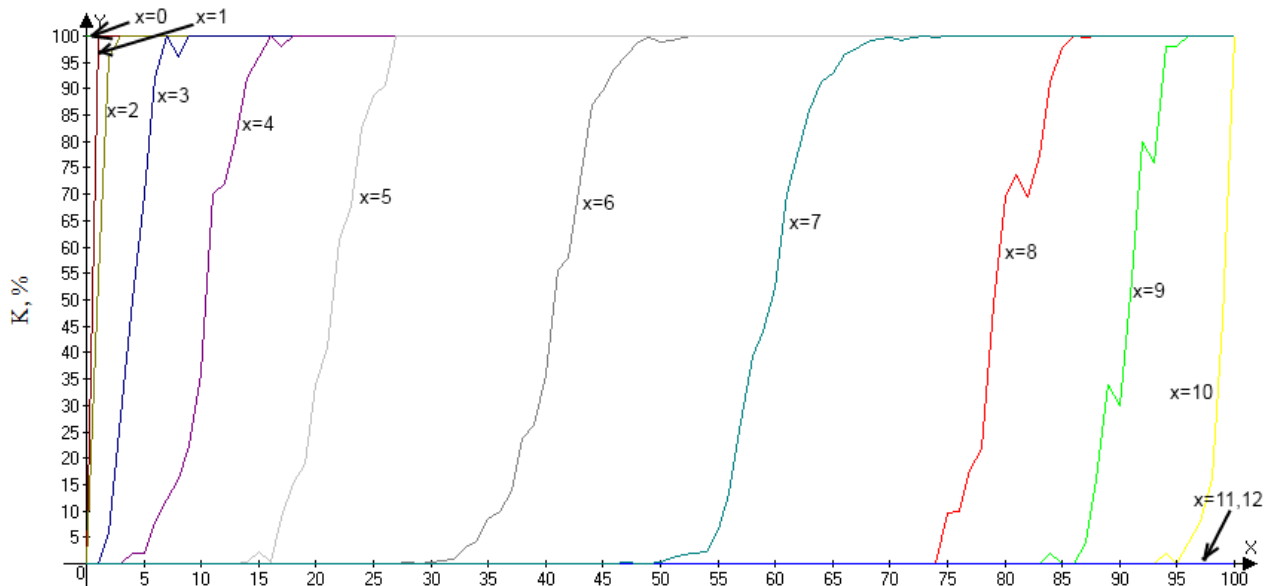


Рис. 3. Перколяція на трикутній ґратці

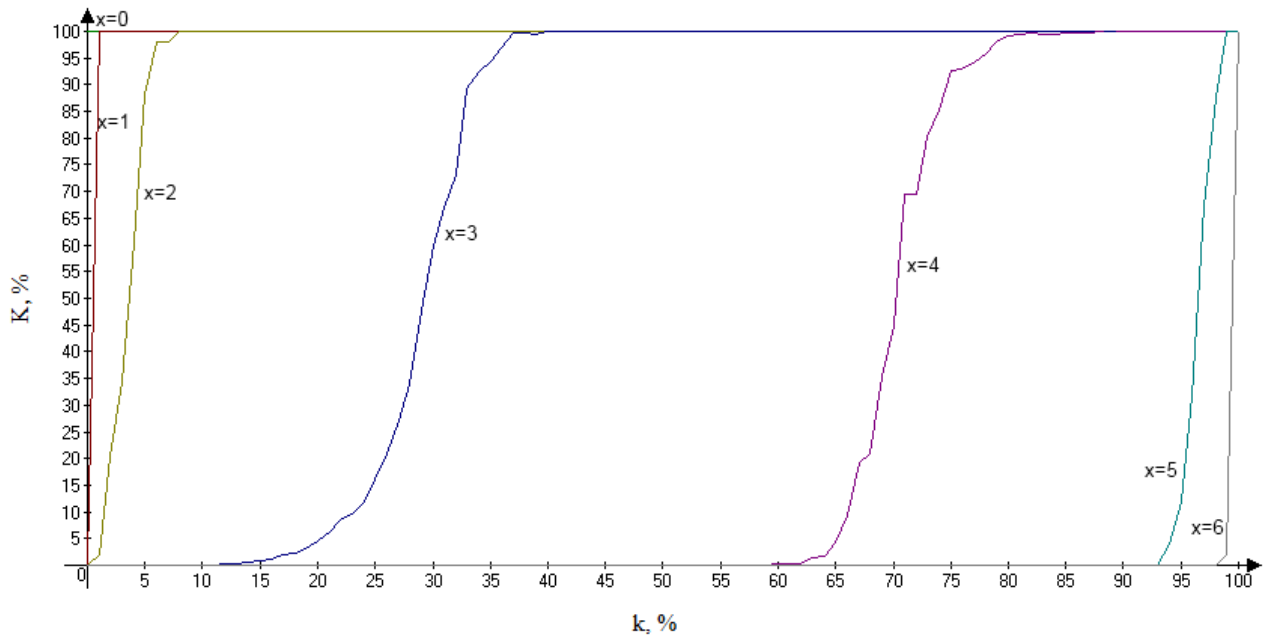


Рис. 4. Перколяція на шестикутній ґратці

Із цих графіків прослідковується аналогія перколяції у фізиці і у грі «Життя»: значення K на невеликому проміжку значень k зростає від нуля до 100% так само, як провідність суміші провідника та діелектрика при певній концентрації провідника майже миттєво зростає від нуля до великого значення.

На всіх трьох видах ґраток можна відмітити особливі випадки:

1. При $x=0$ $K=100\%$ для будь-яких k . Це обумовлено тим, що на першому ж кроці еволюції все поле заповнюється, і жодна з клітин не помирає.

2. При $x=1$ $K=0$ при $k=0\%$ і $K=100\%$ при $k>0\%$. Цей випадок аналогічний попередньому, тільки заповнення відбувається в декілька кроків, якщо є принаймні одна жива клітина.

3. При x , що дорівнює максимально можливому числу сусідів на квадратній та шестикутній ґратці будь-яка, крім повністю заповненої, колонія вмирає. Це пояснюється тим, що за таких умов на кожному кроці помирають сусіди кожної порожньої комірки.

4. При $x=11$ та $x=12$ на трикутній ґратці будь-яка колонія вмирає, оскільки кутові клітини не можуть мати стільки клітин, тому вони помруть на першому ході, внаслідок чого поступово помре вся колонія.

В цих випадках не має місця явище перколяції, тому надалі їх не розглядатимемо.

Аналіз отриманих результатів

Відомо, що перколяційні явища з високою точністю можна описати степеневою функцією [4, гл.5]. У випадку клітинних автоматів ця залежність має вигляд:

$$K(k) = C \cdot (k - P_{\min})^\beta, \quad (1)$$

де C та β – константи, P_{\min} – поріг перколяції. Спробуємо визначити їх з експериментальних даних. Для цього прологарифмуємо обидві частини залежності $K(k)$:

$$\ln(K) = \ln(C) + \beta \cdot \ln(k - P_{\min}) \quad (2)$$

Для прикладу візьмемо одержану експериментально залежність $K(k)$ для трикутної ґратки при $x=6$ (рис.5а). Визначимо межі перколяції: $P_{\min}=32\%$, $P_{\max}=48\%$. Для значень з інтервалу $k=P_{\min}+1..P_{\max}$ побудуємо наступний графік: по осі абсцис відкладемо $\ln(k - P_{\min})$, а по осі ординат – $\ln(K)$ (рис.5б, графік 1). Потім виконаємо регресійний аналіз до лінійної функції⁵ (рис.5б, графік 2).

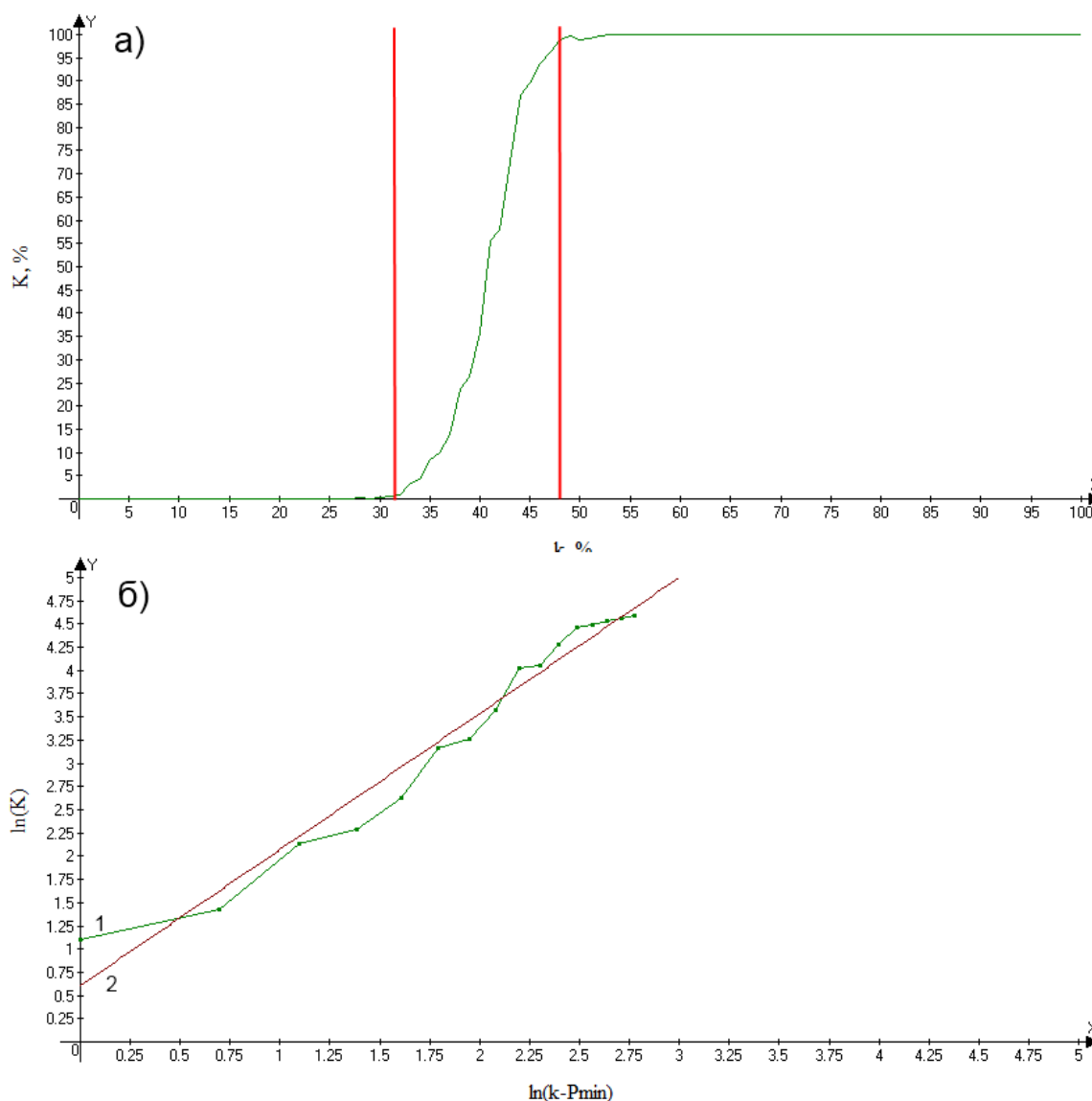


Рис. 5. Приклад аналізу процесу перколяції

Нехай ця лінійна функція має вигляд $y(x)=a \cdot x+b$, а з урахуванням системи координат:

⁵ Побудова графіку виконана за допомогою моєї програми, а регресійний аналіз – за допомогою програми **Advanced Grapher 2.2**.

$$\ln(K) = b + a \cdot \ln(k - P_{\min}) \quad (3)$$

Тоді з рівнянь (2) і (3) випливає, що

$$\begin{cases} \ln(C) = b \\ \beta = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = e^b \\ \beta = a \end{cases} \quad (4)$$

В даному випадку ця функція має вигляд $y(x)=1,46493x+0.60452$. Отже, $\beta=1,46493$; $C=e^{0.60452}=1,83037$. Підставивши числа в рівняння (1), отримаємо рівняння перколяції:

$$K(k) \approx 1,83 \cdot (k - 32\%)^{1.46}, \quad (5)$$

Оскільки при обраному способі моделювання результати для різних значень k не залежать один від одного, то точність отриманого результату не залежить від кількості побудованих графіків $K(k)$, тому одного дослідження цілком достатньо.

За аналогічним алгоритмом проаналізуємо перколяцію на різних ґратках за різних умов, використовуючи наведені вище експериментальні графіки залежності $K(k)$. В таблиці 1 для кожного випадку зазначено:

- P_{\min} та P_{\max} – нижня та верхня межа перколяції;
- $y(x)$ – рівняння наближеної лінійної функції;
- R^2 – коефіцієнт детермінації, який вказує, наскільки точним є наближення;
- β , C – коефіцієнти з рівняння (1), які характеризують процес перколяції.

Для $x=2$ на трикутній та $x=2,7$ на квадратній ґратці аналіз не проведено, оскільки перколяція відбувається дуже швидко, що призводить до великих похибок.

Таблиця 1

x	P_{\min}	P_{\max}	$y(x)$	R^2	β	C
Трикутна ґратка, правило $b(x,12)/s(x,12)$						
2	0%	2%				
3	1%	8%	$1,43731x+2,10532$	0,9426	1,43731	8,21
4	3%	17%	$1,76916x+0,145890$	0,9527	1,76916	1,16
5	15%	26%	$1.43239x+1.10156$	0,8465	1,43239	3,01
6	32%	48%	$1.46493x+0.604521$	0,9655	1,46493	1,83
7	50%	68%	$1.95489x-0.776747$	0,9242	1,95489	0,46
8	74%	85%	$1.14082x+1.88104$	0,9145	1,14082	6,56
9	83%	95%	$1.75236x+0.174957$	0,8740	1,75236	1,19
10	93%	99%	$1.53585x+0.341737$	0,7937	1,53585	1,41
Квадратна ґратка, правило $b(x,8)/s(x,8)$						
2	0%	4%				
3	3%	14%	$1,27917x+1,68646$	0,9702	1,27917	5,40
4	21%	41%	$1,92518x-1,147324$	0,9619	1,92518	0,32
5	57%	75%	$1,27571x+1,26520$	0,9477	1,27571	3,54
6	86%	96%	$1,06501x+2,46969$	0,9470	1,06501	11,82
7	96%	99%				
Шестикутна ґратка, правило $b(x,6)/s(x,6)$						
2	0%	7%	$1.95671x+1.19485$	0,9397	1.95671	3,30

3	13%	36%	$1.79021x+1.40678$	0,9275	1,79021	4,08
4	62%	79%	$1.76911x-0.073739$	0,9584	1.76911	1,08
5	93%	98%	$1.79007x+1.59010$	0,9669	1.79007	4,90

За даними з таблиці 1 побудуємо графіки залежності меж перколяції від параметра x , який характеризує нижню межу умов на трикутній (рис.6а), квадратній (рис. 6б) та шестикутній (рис.6в) ґратках.

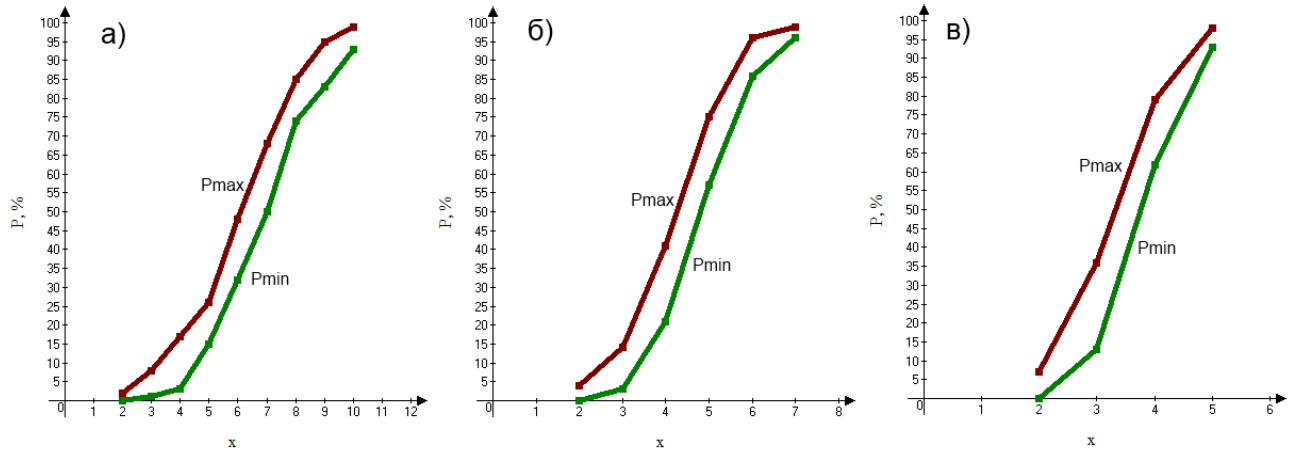


Рис. 6. Залежність меж перколяції від умов

Як можна бачити з цих графіків, межі перколяції зростають зі збільшенням x . Дійсно, для того, щоб колонія заповнила все поле, необхідно виникнення конфігурацій достатньо щільних, щоб кожна жива клітина мала не менше x живих сусідів і якісь порожні комірки мали не менше x живих сусідів. Очевидно, що зі зростанням значення x зростає необхідна для заповнення щільність, а отже зростають і межі перколяції.

Коефіцієнт β в теорії перколяції називається критичним індексом [4, гл.5]. Оскільки він є важливим параметром перколяції, визначимо його середнє значення $\bar{\beta}$ та середньоквадратичне відхилення цього значення σ для всіх видів ґраток за даними з таблиці 1 – вони наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

ґратка	$\bar{\beta}$	σ
Трикутна	1,56	0,24
Квадратна	1,39	0,32
Шестикутна	1,83	0,08

Дисперсія залежності $K(k)$ при перколяції

Проаналізуємо отриману вище залежність середньої кінцевої концентрації від початкової за допомогою дисперсії. Це дасть можливість побачити, наскільки сильно відрізняються значення $K(k)$ при близьких k на різних етапах перколяції.

Для цього для кожного значення k розглянемо його окіл $[k-\Delta k; k+\Delta k]$ і підрахуємо дисперсію для всіх експериментально отриманих точок $k_1 \dots k_n$ з цього проміжку [5, гл.5]:

$$D(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K(k_i) - \bar{K})^2}{n}}, \text{ де } \bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n K(k_i)}{n}$$

Позначимо **step** – крок зміни **k** при побудові залежності, та **n** – число точок по лівий і правий бік від досліджуваної, які беруться до уваги. Тоді $\Delta k = \text{step} \cdot n$ і формула залежності $D(k)$ приймає наступний вигляд:

$$D(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=-n}^n (K(k + i \cdot \text{step}) - \overline{K(k)})^2}{2n + 1}}, \text{ де } \overline{K(k)} = \frac{\sum_{i=-n}^n K(k + i \cdot \text{step})}{2n + 1}$$

При **k**, близьких до 0% та 100% окіл буде обрізатися, але це ніяк не вплине на результат, бо тоді $D(k)=0$.

Нижче наводяться графіки $D(k)$, отримані при значеннях **step=0,2%** та **n=25**. Таким чином, довжина околу, на якому рахується дисперсія $2 \cdot \Delta k = 10\%$. Крок взятий коротший, ніж в попередніх дослідях для більш точного результату. Для кожного виду ґратки побудовано по графіку (рис.7):

- Графік 1 – шестикутна ґратка, правило b36/s36;
- Графік 2 – квадратна ґратка, правило b48/s48;
- Графік 3 – трикутна ґратка, правило b(6,12)/s(6,12).

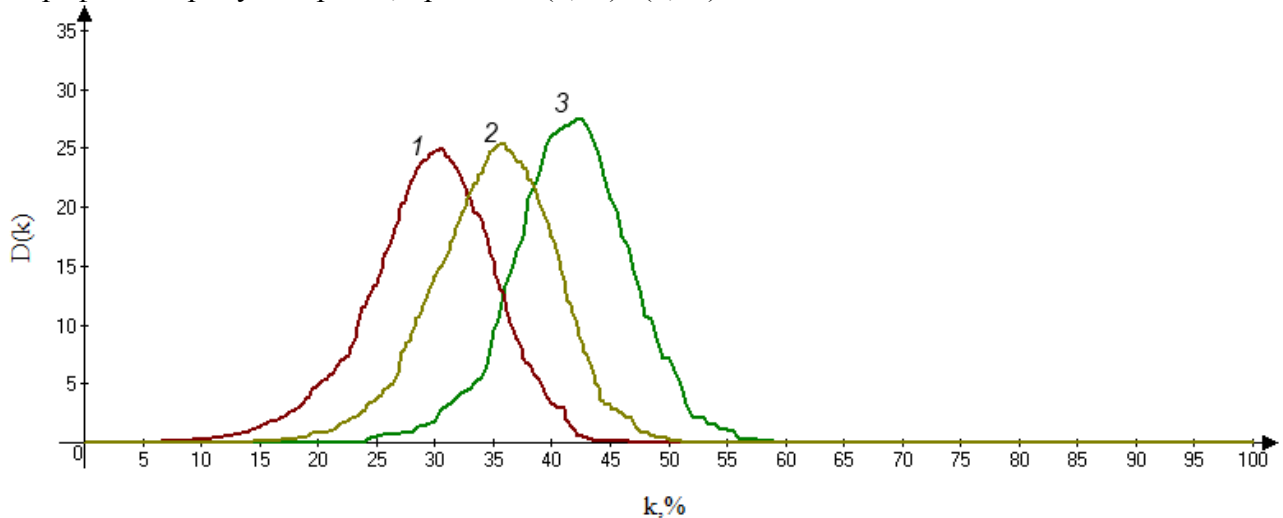


Рис. 7. Дисперсія залежності концентрації при перколяції

Як можна бачити з графіків, максимальне значення дисперсії всіх трьох перколяційних процесів майже однакове, що вказує на їх подібність. Також важливо відмітити, що графіки симетричні, хоча вихідні графіки $K(k)$ не є симетричними.

Висновки

В цій статті:

- введено та пояснено явище перколяції в клітинних автоматах;
- визначено умови, за яких вона відбувається;
- експериментально отримано залежності, які характеризують перколяцію за різних умов на різних видах ґраток;
- на основі цих залежностей визначена та пояснена залежність меж перколяції від умов;
- для кожного випадку визначені числові параметри процесу перколяції та визначено середній критичний індекс перколяції для кожного виду ґратки;
- для окремих залежностей проаналізована дисперсія.

Наскільки мені відомо, жоден дослідник серйозно не вивчав в КА ефекти, подібні до описаних в цій статті. Тому це дослідження доводить, що в теорії КА це є багато невивчених галузей, і що як інструмент моделювання реальних явищ вони мають набагато більше можливостей, ніж це здається з першого погляду.

Ефект перколяції КА може допомогти у вивченні аналогічних йому реальних процесів. Наприклад, відомо, що епідемія виникає, коли кількість захворілих на певній території перевищує певну норму, при цьому ця кількість різко збільшується. Це нагадує різке заповнення поля колоніями КА. Тому, створивши відповідну модель КА (можливо складнішу, ніж ті, що розглядалися в цій статті) та моделюючи її еволюцію за різних умов, медики зможуть прийняти

рішення, чи є ситуація на певній території потенціально епідемічною та вжити відповідних заходів (щеплення, ізоляція хворих) для уникнення епідемії.

Іншим прикладом є розповсюдження чуток. Нехай стався витік секретної інформації – її узнала якась одна людина. Вона розповість її своїм друзям, ті – своїм друзям, і через деякий час її будуть знати стільки людей, що фактично її будуть знати всі і вона перестане бути секретною. Так ось, знайти цей час також можна, проаналізувавши час перколяції у відповідному до ситуації КА.

Сьогодні КА майже не використовуються для моделювання реальних процесів, незважаючи на потенціальну спроможність для цього. На мою думку, це пов'язано з їх недостатньою вивченістю та тим, що багато науковців відносяться до них не більше, ніж як до комп'ютерної гри. Крім того, у клітинних автоматів є й інше призначення – створення штучного інтелекту, адже саме для цього їх розробляв фон Нейман. В цьому напрямку вже є значний прогрес, адже так звані нейронні мережі працюють за принципом клітинних автоматів. Тому я вважаю, що дослідження, проведені в даній статті, є актуальними.

Подяка

Автор глибоко вдячний викладачу Дніпропетровського ліцею інформаційних технологій, кандидату фізико-математичних наук Ентіну Йосифу Абрамовичу за корисні поради під час виконання роботи.

Література

1. Дж. фон Нейман – Теория самовоспроизводящихся автоматов – М.: Мир, 1971. — 384 с.
2. M.Gardner - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" // Scientific American - #223 (October 1970) – p.120-123.
3. Д.С. Федоряка – Моделювання та дослідження гри «Життя» та її модифікацій на трикутних, квадратних та шестикутних ґратках // Математика, Інформатика, Фізика. – 2012 р. - №2 – с.69-93.
4. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос – Электронные свойства легированных полупроводников – М.: Наука, 1979. – 416 с.
5. И.И.Елисеева, М.М.Юзбашев – Общая теория статистики: Учебник – М.: Финансы и статистика, 2004. – 656 с.